数理解析研究所講究録
1002巻 1997年 169-179

Explicit formulae of Siegel Eisenstein series

春木　淳 (ATSUSHI HARUKI)

東京工業大学　理工学研究科

1. Introduction

Siegel modular 群に関する Eisenstein 級数については、志村 [Sh] によっていくつかの問題提起がされていた。これに対し、Weissauer は stable modular form の理論を使って、これらの問題に対する解答を与えた。一方、水本 [Mi] によってこの Eisenstein 級数のFourier 展開の明示公式が与えられた。 ここではこれらの問題を、水本による Fourier 展開の表示を使って明示的に証明した。

2. Siegel Eisenstein 級数の Fourier 展開

$m \in \mathbf{Z}_{>0}$ 、 $k \in 2\mathbf{Z}_{\geq 0}$ に対し

$$E_k^{(m)}(z,s) := \det(y)^s \sum_{\{c,d\}} \det(cz+d)^{-k} |\det(cz+d)|^{-2s} \tag{2.1}$$

を $\mathrm{Sp}_{2m}(\mathbf{Z})$上の non-holomorphic Eisenstein 級数という。和は $\begin{pmatrix} * & * \\ c^{(m)} & d^{(m)} \end{pmatrix}$ が $\left\{ \begin{pmatrix} * & * \\ 0^{(m)} & * \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}_{2m}(\mathbf{Z}) \right\} \Big\backslash \mathrm{Sp}_{2m}(\mathbf{Z})$ の完全代表系をはしるものとする。

また、$s\in\mathbf{C}$, z は Siegel 上半空間

$$H_m := \{z = x + yi \in \mathbf{C}^{(m)} | {}^t z = z, y > 0\}$$

上の変数とする。よく知られているように、(2.1)の右辺は

$$\left\{(z,s) \,\middle|\, z \in H_m; \mathrm{Re}(s) > \tfrac{m+1-k}{2}\right\}.$$

において絶対かつ広義一様収束し、Langlands の理論より $E_k^{(m)}(z,s)$ は $s\in\mathbf{C}$ 上の有理型関数として解析接続され、

$$\frac{\Gamma_m\left(s+\frac{k}{2}\right)}{\Gamma_m(s)} \cdot \xi(2s) \prod_{j=1}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \xi(4s-2j) E_k^{(m)}\left(z, s-\tfrac{k}{2}\right)$$

は $s \mapsto \kappa(m) - s$ と置き換えても不変であるという関数等式をみたす。ここで

$$\Gamma_m(s) := \pi^{\frac{m(m-1)}{4}} \prod_{j=0}^{m-1} \Gamma\left(s - \tfrac{j}{2}\right),$$

$$\xi(s) := \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\tfrac{s}{2}\right) \zeta(s)$$

とする。$\zeta(s)$ は Riemann zeta function.

この non-holomorphic Eisenstein 級数の Fourier級数展開は、水本 [Mi] によって次のように得られている。Λ_λ を semi-integral な λ次対称行列の集合とし、Λ_λ^* をその部分集合で正則な行列の集合とする。$\mathbf{Z}_{\mathrm{prim}}^{(m,\nu)}$ を $a \in \mathbf{Z}^{(m,\nu)}$ で primitive な行列の集合とする。ν を c の rank とするとき

$$\begin{aligned} E_k^{(m)}(z,s) := &\sum_{\nu=0}^{m} b_{k,\nu,0}^{(m)}(*, y, s) \\ &+ \sum_{\nu=1}^{m} \sum_{\lambda=1}^{\nu} \sum_{h\in\Lambda_\lambda^*} \sum_{r} b_{k,\nu,\lambda}^{(m)}(h[{}^t r], y, s) \mathbf{e}(\sigma(h[{}^t r]x)). \end{aligned}$$

ここで r は、$\mathbf{Z}^{(m,\lambda)}_{\mathrm{prim}}/\mathrm{GL}_\lambda(\mathbf{Z})$ の完全代表系の上をはしり、 $\sigma(z)$ は正方行列 z の trace とする。この Fourier 係数 $b^{(m)}_{k,\nu,\lambda}(h[{}^t r], y, s)$ は、 $\lambda = 0$ のとき

$$
\begin{aligned}
b^{(m)}_{k,\nu,0}(*, y, s) :=& (-1)^{\frac{k\nu}{2}} 2^\nu \pi^{\nu\kappa(\nu)} \frac{\Gamma_\nu(2s+k-\kappa(\nu))}{\Gamma_\nu(s)\Gamma_\nu(s+k)} \\
&\cdot S_\nu(0_\nu, 2s+k) \det y^s \zeta^{(m)}_\nu(2y, 2s+k-\kappa(\nu)),
\end{aligned}
$$

また $1 \leq \lambda \leq m$ のとき

$$
\begin{aligned}
b^{(m)}_{k,\nu,\lambda}(h[{}^t r], y, s) :=& (-1)^{\frac{k\nu}{2}} 2^\nu \pi^{\nu\kappa(\nu)+\frac{\lambda(\nu-\lambda)}{2}} \frac{\Gamma_{\nu-\lambda}(2s+k-\kappa(\nu))}{\Gamma_\nu(s)\Gamma_\nu(s+k)} \\
&\cdot S_\nu(\mathrm{diag}(h, 0_{\nu-\lambda}), 2s+k) \det y^s \det(2y[r])^{\kappa(\nu)-k-2s} \\
&\cdot \eta^*_\lambda\left(2y[r], \pi h; s+k+\tfrac{\lambda-\nu}{2}, s+\tfrac{\lambda-\nu}{2}\right) \\
&\cdot \zeta^{(m-\lambda)}_{\nu-\lambda}(2g(y, u_r), 2s+k-\kappa(\nu))
\end{aligned}
$$

と表される。さらにこの Fourier 係数は

$$
\frac{\Gamma_m\left(s+\frac{k}{2}\right)}{\Gamma_m(s)} \cdot \xi(2s) \prod_{j=1}^{[\frac{m}{2}]} \xi(4s-2j) b^{(m)}_{k,\nu,\lambda}(h[{}^t r], y, s-\frac{k}{2}) \tag{2.1}
$$

において $(s, \nu) \mapsto (\kappa(m)-s, m+\lambda-\nu)$ と置き換えても 不変という関数等式をみたす。

ここで記号の説明を行う。$\nu \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ に対し、 $\kappa(\nu) := \frac{\nu+1}{2}$ とおく。 $h \in \Lambda_\lambda$, $s \in \mathbf{C}$ に対し、

$$
S_\nu(h, s) := \sum_{\substack{r \\ \mathrm{mod}\ 1}} n(r)^{-s} \mathbf{e}(\sigma(hr))
$$

を singular series という。ここで $n(r)$ は $r \in \mathbf{Q}^{(\nu)} \cap V_\nu$ の既約な単因子の分母をかけ合わせたもの、$V_m := \{x \in \mathbf{R}^{(m)} | {}^t x = x\}$ とする。

$P_m := \{x \in V_m | x > 0\}$ としたとき、$g \in P_m$, $h \in V_m$, $(\alpha, \beta) \in \mathbf{C}^2$ に対し

$$\eta_m(g,h;\alpha,\beta) := \int\limits_{\substack{\mathrm{V}_m \\ x \pm h > 0}} e^{-\sigma(gx)} \det(x+h)^{\alpha-\kappa(m)} \det(x-h)^{\beta-\kappa(m)} dx$$

は confluent hypergeometric functions と呼ばれ、$\mathrm{Re}(\alpha) > \kappa(m)-1$, $\mathrm{Re}(\beta) > m$ において 収束する。

$$\eta_\lambda^*(g,h;\alpha,\beta) := \det(g)^{\alpha+\beta-\kappa(\lambda)} \eta_\lambda(g,h;\alpha,\beta)$$

とおくと、Shimura による結果から

$$\omega(g,h;\alpha,\beta) := 2^{-p\alpha-q\beta} \Gamma_p \left(\beta - \frac{q}{2}\right)^{-1} \Gamma_q \left(\alpha - \frac{p}{2}\right)^{-1} \delta_+(hg)^{\kappa(\lambda)-\alpha-\frac{q}{4}} \cdot \delta_-(hg)^{\kappa(\lambda)-\beta-\frac{p}{4}} \eta_\lambda^*(g,h;\alpha,\beta)$$

は $(\alpha,\beta) \in \mathbf{C}^2$ 上の正則関数となる。よって $\eta_\lambda(g,h;\alpha,\beta)$ は $(\alpha,\beta) \in \mathbf{C}^2$ 上の有理型関数に解析接続される。

$1 \le \nu \le m$ と $g \in \mathrm{P}_m$ に対し、

$$\zeta_\nu^{(m)}(g,s) := \sum_{a \in \mathbf{Z}_{\mathrm{prim}}^{(m,\nu)}/\mathrm{GL}_\nu(\mathbf{Z})} \det(g[a])^{-s}$$

は Epstein zeta functions と呼ばれ、$\mathrm{Re}(s) > m/2$ において収束する。また

$$\varepsilon_\nu(s) := \prod_{j=0}^{\nu-1} \left(s - \tfrac{j}{2}\right)$$

とおいたときに Maass による結果より

$$\Xi_\nu^{(m)}(g,s) := 2\varepsilon_\nu(s)\varepsilon_\nu\left(\frac{m}{2} - s\right) \prod_{i=0}^{\nu-1} \xi(2s-i)\zeta_\nu^{(m)}(g,s)$$

は $s \in \mathbf{C}$ 上の正則関数となる。よって $\zeta_\nu^{(m)}(g,s)$ は $s \in \mathbf{C}$ 上の有理型関数に解析接続される。

また、$r \in \mathbf{Z}_{\mathrm{prim}}^{(m,\lambda)}$ に対し、bijection

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Z}_{\mathrm{prim}}^{(m,\lambda)}/\mathrm{GL}_\lambda(\mathbf{Z}) & \leftrightarrow & \mathrm{GL}_m(\mathbf{Z})/\Delta_\lambda^{(m)} \\ r & \longmapsto & u_r \end{array}$$

によって定まる $u_r \in \mathrm{GL}_m(\mathbf{Z})$ が一意的に存在する。このとき、$y[u_r]$ の Jacobi 分解を

$$y[u_r] = \mathrm{diag}(y[r], g(y,u_r)) \begin{bmatrix} 1_\lambda & b \\ 0 & 1_{m-\lambda} \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

として、 $g(y,u_r)$ をこの式により定義する。

3. 結果

Shimura [Sh] による問題提起

(A) $E_k^{(m)}(z,s)$ は $s=0$ において s に関し holomorphic か？

(A) が成り立つとき $E_k^{(m)}(z) := E_k^{(m)}(z,0)$とする。

(B) $E_k^{(m)}(z)$ は holomorphic modular form か？

(C) そのとき $E_k^{(m)}(z)$ の Fourier 係数は有理数か？

に沿って、まず $s=0$ での $E_k^{(m)}(z,s)$ の正則性を確かめるため、各Fourier 係数 $b_{k,\nu,\lambda}^{(m)}(h[{}^t r], y, s)$ の s の関数としての正則性を調べた。

$h \in \Lambda_\lambda^*$ に対し $d(h)$ を次のように定める。

$$d(h) := (-1)^{[\frac{\lambda}{2}]} 2^{-\delta(\frac{\lambda-1}{2})} \det(2h)$$

ここで、$[x]$ は x を越えない最大の整数、$\delta(x)$ は x が整数のとき 1、それ以外のとき 0とする。

Theorem 1. $b^{(m)}_{k,\nu,\lambda}(h[{}^tr],y,s)$ は次の場合を除いて $s=0$ で s の関数として正則.
$m \geq 2$ かつ $k=\frac{m+2}{2}$ のとき、

- $(\nu,\lambda)=(m,m-2)$, $k\equiv 2\mathrm{mod}4$, $h>0$, $d(h)=$ *integral square*
- $(\nu,\lambda)=(m-1,m-2)$, $k:$ *even*, $h>0$, $d(h)=$ *integral square.*

この場合、1位の*pole*をもつ可能性がある. ($m=2$ の場合、h に関する条件は無視する.)

Proof. Fourier 係数に現れる各関数の $s=0$ での挙動を調べればよい。詳しくは [Ha] Section 2 を参照。($d(h)$ が integral square となっているとき、singular series の中に現れる $\left(\frac{d(h)}{*}\right)$ を指標とする Dirichlet の $L-$関数が Riemann zeta 関数となるので simple pole が生じ、このような結果となる。)

さらに次の定理が成り立つことが得られた。

Theorem 2. $0\leq\lambda\leq\nu\leq\mu\leq m$ とする. *k:even* が $2k=\mu+\nu-\lambda+1$ を満たすとき、

$$\lim_{s\to 0}\frac{b^{(m)}_{k,\mu,\lambda}(h[{}^tr],y,s)}{b^{(m)}_{k,\nu,\lambda}(h[{}^tr],y,-s)}=(-1)^{\alpha} \qquad \alpha=\begin{cases}\frac{k}{2} & k\leq\frac{m+1}{2}\\ \frac{k}{2}+1 & k\geq\frac{m+2}{2}.\end{cases} \tag{2.3}$$

Proof. [Ha] Theorem 3.1 と一部異なる証明を与える。

[Mi] Proposition 6.3 より

$$
\begin{aligned}
(2.4)\qquad & b^{(m)}_{k,\nu,\lambda}(h[{}^t r], y, s) \\
&= (-1)^{\frac{k(\nu-\lambda)}{2}} 2^{(\nu-\lambda)(2s+k-\kappa(\nu-\lambda))} \cdot \frac{\Gamma_{\nu-\lambda}\left(s+\frac{k}{2}\right)^2}{\Gamma_{\nu-\lambda}(s)\Gamma_{\nu-\lambda}(s+k)} \\
&\cdot \frac{\xi(2s+k+\lambda-\nu)}{\xi(2s+k)} \prod_{i=1}^{\nu-\lambda} \frac{\xi(4s+2k-\nu-j)}{\xi(4s+2k-2j)} \\
&\cdot \left(\frac{\det(y)}{\det(2y[r])}\right)^{\frac{\nu-\lambda}{2}} \zeta^{(m-\lambda)}_{\nu-\lambda}(2g(y,u_r), 2s+k-\kappa(\nu)) \\
&\cdot b^{(m)}_{k,\lambda,\lambda}\left(h[{}^t r], y, s+\tfrac{\lambda-\nu}{2}\right)
\end{aligned}
$$

という式が成り立つ。(2.3) の分母を、(2.1) の関数等式で 折り返した後に (2.4) を使うと、

$$
b^{(m)}_{k,\nu,\lambda}(h[{}^t r], y, -s) = (\text{known part}) \cdot b^{(m)}_{k,\lambda,\lambda}(h[{}^t r], y, s-k+\tfrac{\nu+1}{2})
$$

となる。また分子は (2.4) のみを使って書き直すと

$$
b^{(m)}_{k,\mu,\lambda}(h[{}^t r], y, s) = (\text{known part}) \cdot b^{(m)}_{k,\lambda,\lambda}(h[{}^t r], y, s+\tfrac{\lambda-\mu}{2})
$$

となる。仮定より $2k = \mu+\nu-\lambda+1$ なので、(2.3) 式の Fourier 係数の比は次のようによく知られた関数の比として表される。

$$
\frac{b^{(m)}_{k,\mu,\lambda}(h[{}^t r], y, s)}{b^{(m)}_{k,\nu,\lambda}(h[{}^t r], y, -s)} = D(k,s)\cdot G(k,s)\cdot K(m,k,s),
$$

ここで

$$
D(k,s) = 2^{(4s+m)\left(k-\frac{m+1}{2}\right)} \left(\frac{\det y}{\det(2y[r])}\right)^{k-\frac{m+1}{2}},
$$

$$
\begin{aligned}
G(k,s) =&(-1)^{k\left(k-\frac{m+1}{2}\right)} \frac{\Gamma_{\mu-\lambda}\left(s+\frac{k}{2}\right)^2}{\Gamma_{\mu-\lambda}(s)\Gamma_{\mu-\lambda}(s+k)} \frac{\Gamma_m\left(\frac{m+1-k}{2}+s\right)}{\Gamma_m\left(\frac{m+1}{2}+s\right)} \\
&\frac{\Gamma_m(k-s)}{\Gamma_m\left(\frac{k}{2}-s\right)} \frac{\Gamma_{m-\nu}\left(\frac{m+1}{2}-k+s\right)\Gamma_{m-\nu}\left(\frac{m+1}{2}+s\right)}{\Gamma_{m-\nu}\left(\frac{m+1-k}{2}+s\right)^2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&K(m,k,s) \\
=&\frac{\xi(-2s+k)}{\xi(2s+k)} \prod_{i=1}^{\mu-\lambda} \frac{\xi(4s-2k-\mu-i)}{\xi(4s+2k-2i)} \prod_{j=1}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \frac{\xi(-4s+2k-2j)}{\xi(4s-2k+2m+2-2j)} \\
&\prod_{l=1}^{m-\nu} \frac{\xi(4s-2k+2m+2-2l)}{\xi(4s-2k+m+\nu-\lambda+2-l)} \frac{\zeta_{\mu-\lambda}^{(m-\lambda)}\left(2g(y,u_r),2s+\frac{\nu-\lambda}{2}\right)}{\zeta_{m-\nu}^{(m-\lambda)}\left(2g(y,u_r),2s+\frac{m-\mu}{2}\right)}.
\end{aligned}
$$

$\Gamma-$関数の関係式

$$
\frac{\Gamma_m(s)}{\Gamma_m(s+t)} = (-1)^{mt} \frac{\Gamma_m(\kappa(m)-t-s)}{\Gamma_m(\kappa(m)-s)}
$$

を使って計算すると

$$
\lim_{s\to 0} G(k,s) = (-1)^{\frac{k}{2}}.
$$

また、[Mi] Lemma 6.2 の Epstein zeta 関数の関係式

$$
\zeta_{m-\nu}^m(g,s) = (\det g)^{\frac{\nu}{2}-s} \frac{\prod_{j=m-\nu}^{m-1} \xi(2s-j)}{\prod_{j=0}^{\nu-1} \xi(2s-j)} \zeta_\nu^m\left(g,\frac{m}{2}-s\right)
$$

によって $\zeta_{m-\nu}^{(m-\lambda)}\left(2g(y,u_r),2s+\frac{m-\mu}{2}\right)$ を書き直すと、[Ha] Proposition 3.4 を使うことができ、

$$
\lim_{s\to 0} K(m,k,s) = \varepsilon_m \det(2g(y,u_r))^{-k+\frac{m+1}{2}}.
$$

ここで ε_m は $k \le \frac{m+1}{2}$ のときは 1 、$k \ge \frac{m+2}{2}$ のときは -1 とする。さらに (4) より

$$
\det y = \det(y[r])\det(g(y,u_r))
$$

となることから与式が得られる。 □

Theorem 2 によって Theorem 1 の simple pole が互いに打ち消し合っていることがわかる。さらに $k = \frac{m+2}{2} \equiv 2 \mod 4$ の場合を除いて、 h が positive definite になるときのみが 0 にならずに残ってくる。

Theorem 3. $E_k^{(m)}(z,s)$ は $s = 0$ で s の関数として正則. $E_k^{(m)}(z) := E_k^{(m)}(z,0)$ とおく.

(1) $2 \le k \le \frac{m+1}{2}$ のとき

$k \equiv 2 \mathrm{mod} 4$ の場合、$E_k^{(m)}(z) \equiv 0$.

$k \equiv 0 \mathrm{mod} 4$ の場合、$E_k^{(m)}(z)$ は *holomorphic modular form* で、次のように表される。

$$E_k^{(m)}(z) = 2 + 2 \sum_{\lambda=1}^{\rho} \sum_{\substack{h \in \Lambda_\lambda^* \\ h>0}} \sum_{r} a_k(h) \mathbf{e}(\sigma(h[{}^t r]z)).$$

ここで ρ は $k \le \frac{m-1}{2}$ のとき $2k$, $k \ge \frac{m}{2}$ のとき m で Fourier 係数 $a_k(h)$ は

$$(-1)^{\frac{(\lambda+1)(\lambda+3)}{8}} 2^{\frac{(3\lambda+1)}{2} - k} \frac{k!(\det(2h))^{k-\kappa(\lambda)}}{(k - \frac{\lambda+1}{2})! B_k} \prod_{j=1}^{\frac{\lambda-1}{2}} B_{2k-2j}^{-1} P(k,h) \qquad (\lambda\text{:}odd)$$

$$(-1)^{\frac{\lambda}{2}} 2^{\lambda} \frac{k!}{(k - \frac{\lambda}{2})!} \left(\frac{\det(2h)}{f}\right)^{k-\kappa(\lambda)} \frac{B_{k-\frac{\lambda}{2},\chi}}{B_k} \prod_{j=1}^{\frac{\lambda}{2}} B_{2k-2j}^{-1} P(k,h) \qquad (\lambda\text{:}even)$$

と表される. ここで f は二次指標 $\left(\frac{d(h)}{*}\right)$ の導手、 χ は $\mathrm{mod} f$ の原始的指標、 $P(k,h)$ は $d(h)$ の約数のある有理式、$B_{k,\chi}$ は一般 *Bernoulli* 数とし、$\chi = id.$ のとき B_k とする.

(2) $k = \frac{m+2}{2}, \frac{m+3}{2}$ かつ $k \equiv 2 \bmod 4$ の場合、

$$E_k^{(m)}(z) = 1 + \sum_{\lambda=1}^{m} \sum_{\substack{h \in \Lambda_\lambda^* \\ h>0}} \sum_{r} a_k(h) \mathbf{e}(\sigma(h[{}^t r]z)) + (\textit{non-hol. part})$$

と表すことができる．$a_k(h)$ は上と同じもの．

(3) $k = \frac{m+2}{2}, \frac{m+3}{2}$ かつ $k \equiv 0 \bmod 4$, または $k \geq \frac{m+4}{2}$ のとき、$E_k^{(m)}(z)$ は *holomorphic modular form*で、次のように表される。

$$E_k^{(m)}(z) = 1 + \sum_{\lambda=1}^{m} \sum_{\substack{h \in \Lambda_\lambda^* \\ h>0}} \sum_{r} a_k(h) \mathbf{e}(\sigma(h[{}^t r]z))$$

と表すことができる．$a_k(h)$ は上と同じもの．

よって

Corollery. *Fourier* 係数 $a(h)$ は有理数.

さらに、$z \in H_m$ に対し $\Delta = \det\left(\frac{1}{2}(1+\delta_{ij})\frac{\partial}{\partial z_{ij}}\right)$ とおく。[Sh] における Δ の confluent hypergeometric functions への作用の結果から $k = \frac{m+3}{2}$ かつ $k \equiv 2 \bmod 4$ のとき

$$\begin{aligned} & b_{k,\lambda,\lambda}^{(m)}(h[{}^t r], y, -1)\mathbf{e}(\sigma(h[{}^t r]x) \\ = & \frac{1}{2\Gamma(m)} \cdot (4i)^m \Delta \left\{ \log(\det y)\, b_{k-2,\lambda,\lambda}^{(m)}(h[{}^t r], y, 0)\ \mathbf{e}(\sigma(h[{}^t r]x) \right\}. \end{aligned}$$

となることがわかる。これより

Theorem 4. $k = \frac{m+3}{2}$ かつ $k \equiv 2 \bmod 4$ とする。Theorem 3 (2) の *non-hol. part* は

$$\Delta\{\log(\det y) E_{k-2}^{(m)}(z)\}$$

と表される。

References.

[Ar] Arakawa T., Dirichlet series corresponding to Siegel's modular forms of degree n with level n. Tohoku Math.J., **42** (1990), 261–286.

[Bö] Böcherer S., Über die Fourierkoeffizienten der Siegelschen Eisenstein-reihen. Manuscr. Math., **45** (1984), 273–288.

[Ha] Haruki A., Explicit fomulae of Siegel Eisenstein series. Manuscr. Math., **92** (1997), 107–134

[Mi] Mizumoto S., Eisenstein series for Siegel modular groups. Math.Ann. **297** (1993), 581–625.

[Na] Nagaoka S., A note on the Siegel-Eisenstein series. Proc. Japan Acad. **71**, Ser. A (1995), 233–234.

[Sh] Shimura S., On Eisenstein series. Duke Math.J. **50** (1983), 417–476.

[We] Weissauer R., Stabile Modulformen und Eisensteinreihen. (Lect.Notes Math vol.**1219**). Berlin Heidelberg New York, Springer 1986.